ค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังดัดแปลงเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงต่อเนื่อง

Average Run Length by Numerical Integral Equation Approach of Modified EWMA Control Chart when Observations are from Continuous Distributions

ชมพูนุช แสงอรุณวงศ์[1], ยุพาภรณ์ อารีพงษ์[2], เสาวณิต สุขภารังษี[3]
[1,2,3]ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้ศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length : ARL) โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation : NIE) โดยวิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลข ได้แก่ วิธีกฎเก๊าส์ (Gaussian Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule) สำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average control chart : Modified EWMA) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงต่อเนื่อง เช่น การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล เป็นต้น นอกจากนี้ ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart : EWMA) และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average control chart : Modified EWMA) โดยเกณฑ์การวัดประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมวัดจากค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length : ARL) เมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลขมีข้อดีในเรื่องเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในกระบวนการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงในการคำนวณหาค่าดังกล่าว จากผลการวิจัยพบว่าแผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้ดีกว่า แผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง

คำสำคัญ: แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังดัดแปลง, ค่าความยาวรันเฉลี่ย, วิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข

Abstract

This research studies the method of estimating the average run length (ARL) by the Numerical Integral Equation (NIE) method. The numerical estimation method is the Gaussian Rule, Midpoint Rule, Trapezoidal Rule and Simpson's Rule for Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart (Modified EWMA control chart) when observations are from continuous distributions such as Exponential distribution etc. In addition, comparing the efficiency of Exponentially Weighted Moving Average control chart (EWMA) and Modified Exponentially Weighted Moving Average control chart (Modified EWMA). The control chart's performance are measured by Average Run Length (ARL) when the process is out of control. The numerical integral method has the advantage of processing time (CPU Times), which is a method used in advanced mathematical processes to calculate that value. In this research, Modified EWMA control chart is better than EWMA control chart for detecting process of every shift.

Keywords: Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart, Average Run Length, Numerical Integral Equation method

บทนำ

ในกระบวนการผลิตทางอุสาหกรรม สามารถเกิดความผันแปรของกระบวนการได้สม่ำเสมอ ความผันแปรต่าง ๆ เกิดขึ้นได้จากหลายปัจจัย ซึ่งความผันแปรเหล่านั้นจะส่งผลต่อคุณภาพของผลิตภัณฑ์ เพื่อเป็นการควบคุมคุณภาพของกระบวนการผลิตให้สม่ำเสมอ จึงมีแนวคิดเกี่ยวกับการควบคุมคุณภาพของผลิตภัณฑ์ขึ้น เพื่อให้กระบวนการผลิตอยู่ในระดับมาตรฐาน โดยการเตือนให้ผู้ผลิตทราบว่า กระบวนการผลิตได้เปลี่ยนแปลงไปจากเกณฑ์ที่กำหนด เพื่อป้องกันไม่ให้มีข้อบกพร่องหรือเสียหายจากกระบวนการผลิต

การควบคุมกระบวนการทางสถิติ (Statistical process control) หรือ SPC เป็นการนำเอาวิธีการทางสถิติมาใช้ในการควบคุมกระบวนการผลิตเพื่อให้อยู่ในระดับมาตรฐาน วิธีหรือเครื่องมือทางสถิติที่จะนำมาใช้เพื่อควบคุมกระบวนการผลิตมีหลากหลายวิธี เช่น แผ่นตรวจสอบ (Check sheet) ฮิสโตแกรม (Histogram) แผนภาพพาเรโต (Pareto diagram) แผนภาพก้างปลาหรือแผนภาพเหตุและผล (Fishbone diagram or Cause and Effect diagram) และแผนภูมิควบคุม (Control Chart) เป็นต้น ซึ่งเครื่องมือที่นิยมและมีประสิทธิภาพคือ แผนภูมิควบคุม (Control Chart) คือแผนภูมิที่เขียนขึ้นโดยใช้หลักการทางด้านสถิติ เพื่อเป็นเครื่องมือตรวจจับและควบคุมกระบวนการผลิต เพื่อป้องกันและแก้ไขปัญหาด้านคุณภาพได้ทันท่วงที

ในปี ค.ศ. 1924 แผนภูมิควบคุมถูกนำมาใช้ครั้งแรก โดยผู้คิดค้นและนำแผนภูมิควบคุมมาใช้ควบคุมกระบวนการผลิตเป็นคนแรก คือ Dr. Walter Andrew Shewhart แห่งสหรัฐอเมริกา ซึ่งในเวลาต่อมามีผู้คิดค้นแผนภูมิควบคุมที่ให้ความสำคัญกับข้อมูลในอดีต เช่น Page (1954) ได้นำเสนอแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม (Cumulative Sum control chart : CUSUM) Robert (1959) ได้นำเสนอแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลัง (Exponentially Weighted Moving Average control chart : EWMA) ซึ่งแผนภูมินี้มีประสิทธิภาพในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก และต่อมา Patel (2011) และ Khan (2017) ได้นำเสนอ แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average control chart : Modified EWMA)

โดยแผนภูมิควบคุมจะทำหน้าที่หลัก 3 ประการ คือ ประการแรกเพื่อกำหนดมาตรฐานในการผลิต ประการที่สองเพื่อช่วยให้การผลิตบรรลุเป้าหมาย และประการสุดท้ายคือเพื่อใช้ในการปรับปรุงการผลิต แผนภูมิควบคุมแบ่งออกเป็น 2 ประเภท โดยพิจารณาจากคุณสมบัติของผลิตภัณฑ์ที่ต้องการควบคุม คือ แผนภูมิควบคุมเชิงผันแปร (Control charts for variables) และแผนภูมิควบคุมเชิงคุณลักษณะ (Control charts for attributes) โดยแผนภูมิควบคุมแต่ละชนิดจะมีหลักการสร้างเหมือนกันคือ ประกอบด้วยเส้นควบคุม 3 เส้น ได้แก่ เส้นกลาง (Center line : CL) ขีดจำกัดควบคุมบน (Upper control limit : UCL) และขีดจำกัดควบคุมล่าง (Lower control limit : LCL) โดยการพิจารณาประสิทธิภาพจากค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length : ARL) ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 สถานะ คือ $\mathbf{ARL}_0$ ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม และ $\mathbf{ARL}_1$ ค่าความยาววิ่งเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม

วิธีการประมาณค่าความยาววิ่งเฉลี่ย (Average Run Length : ARL) มีหลากหลายวิธี โดยการวิจัยนี้เลือกที่จะศึกษาวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation : NIE) โดยวิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลข ได้แก่ วิธีกฎเก๊าส์ (Gaussian Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule) โดยวิธีนี้มีข้อดีในเรื่องเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในกระบวนการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงในการคำนวณหาค่าดังกล่าว ซึ่งในการวิจัยนี้ใช้โปรแกรม Mathematica

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเสนอวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยโดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation : NIE) สำหรับแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average control chart : Modified EWMA) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

2. เพื่อเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_1) และความเร็วในการประมวลผล (CPU Times) ทั้ง 4 วิธีที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations : NIE)

3. เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุม EWMA และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยพิจารณาจากค่า ARL_1 ที่ต่ำที่สุดเป็นเกณฑ์ในการประเมินประสิทธิภาพ

4. เพื่อนำแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังดัดแปลง (Modified EWMA) ประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

ขอบเขตของการวิจัย

1. กำหนดให้ข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง มีพารามิเตอร์ (β) เท่ากับ 1 และ 5

2. แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลังดัดแปลง (Modified Exponentially Weighted Moving Average control chart : Modified EWMA) และแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบชี้กำลัง Exponentially Weighted Moving Average control chart : EWMA) กำหนดค่าพารามิเตอร์ (λ) เท่ากับ 0.05

3. กำหนดระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ (δ) เท่ากับ 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5 และ 1

4. กำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL_0) เท่ากับ 370 และ 500

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ระเบียบวิธีวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงการทดลอง เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (Average Run Length : ARL) โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equation : NIE) สำหรับแผนภูมิควบคุม Modified EWMA และเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างแผนภูมิควบคุม Modified EWMA และแผนภูมิควบคุม EWMA โดยพิจารณาจากค่า ARL_1

2. ขั้นตอนการวิจัย

2.1 ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations : NIE) โดยใช้วิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลข ได้แก่ วิธีกฎเก๊าส์ (Gaussian Rule) วิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) และวิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)

วิธีกฎเกาส์ (Gauss quadrature)

การประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(x)$ ในช่วง $[a,b]$ อยู่ในรูป

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{m} w_{n,i} f\left[z_{n,i}\right] ; w = w_{n,1}, w_{n,2}, ..., w_{n,n}$$

จาก quadrature rule สามารถประมาณสมการปริพันธ์โดยเขียนอยู่ในรูป

$$L(u) = 1 + L(0)F(k-u) + \sum_{j=1}^{n} L(x_j) f(x_j + k - u)$$

วิธีกฎของค่ากลาง (Midpoint Rule)

กำหนดให้ $y = f(x)$ ในช่วง $[a,b]$ แบ่งออกเป็น m ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง $h = \frac{b-a}{m}$ ด้วยกฎของค่ากลาง ที่มีการแบ่งช่วงเป็น m ช่วง สามารถเขียนได้ในรูป

$$M(f,h) = h\sum_{k=1}^{m} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right) \quad ; k = 0,1,2,...,m$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของ $f(x)$ ในช่วง $[a,b]$ อยู่ในรูป $\int_a^b f(x)dx \approx M(f,h)$

วิธีกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

กำหนดให้ $y = f(x)$ ในช่วง $[a,b]$ แบ่งออกเป็น m ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง $h = \frac{b-a}{m}$ ด้วยกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีการแบ่งช่วงเป็น m ช่วง สามารถเขียนได้ในรูป

$$T(f,h) = \frac{h}{2}(f(a) - f(b)) + h\sum_{k=1}^{m} f(x_k) \quad ; k = 0,1,2,...,m$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(x)$ ในช่วง $[a,b]$ อยู่ในรูป $\int_a^b f(x)dx \approx T(f,h)$

วิธีกฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)

กำหนดให้ $y = f(x)$ ในช่วง $[a,b]$ แบ่งออกเป็น $2m$ ช่วง โดยมีช่วงความกว้าง $h = \frac{b-a}{2m}$ ด้วยกฎของซิมป์สัน ที่มีการแบ่งช่วงเป็น $2m$ ช่วง สามารถเขียนได้ในรูป

$$S(f,h) = \frac{h}{3}(f(a) - f(b)) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) \quad ; k = 0,1,2,...,m$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าจากการหาปริพันธ์ของสมการ $f(x)$ในช่วง $[a,b]$ อยู่ในรูป $\int_a^b f(x)dx \approx S(f,h)$

2.2 ศึกษาทฤษฎีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution)

2.3 ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวข้องกับแผนภูมิควบคุม Modified EWMA และแผนภูมิควบคุม EWMA

2.4 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง และระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์

2.5 ประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย (ARL)

2.6 เปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (ARL1) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) ระหว่างวิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ย โดยวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (NIE) สำหรับแผนภูมิควบคุม Modified EWMA

2.7 เปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุม Modified EWMA และแผนภูมิควบคุม EWMA โดยพิจารณาจากค่า ARL_1 ที่ต่ำที่สุดเป็นเกณฑ์ในการประเมินประสิทธิภาพ

2.8 ประยุกต์ใช้แผนภูมิควบคุม Modified EWMA กับข้อมูลจริง

2.9 สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยเมื่อกระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม (ARL_1) และความเร็วในการประมวลผล (CPU Times) ทั้ง 4 วิธีที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations : NIE) ในตารางที่ 1 – ตารางที่ 2 นำเสนอความยาวรันเฉลี่ย (ARL) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล (CPU Times) หน่วยเป็นวินาที ที่คำนวณโดยวิธีสมการเชิงปริพันธ์เชิงตัวเลข Numerical Integral Equations: NIE) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง เมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม (in-control state) กำหนดค่าตวามยาวรันเฉลี่ย ARL_0 เท่ากับ 370 และ 500 ตามลำดับ และระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ (δ) เท่ากับ 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5 และ 1 ตามลำดับ และประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ซึ่งข้อมูลจริงในการศึกษานี้คือข้อมูลระยะเวลาของการกลับมาเป็นซ้ำของโรคมะเร็งหลังจากได้ทำการรักษา (หน่วย : เดือน) จากคนไข้ 128 คน

ตารางที่ 1 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 370,\ m = 500,\ \lambda = 0.05$

δ	$\beta = 1$				δ	$\beta = 5$			
	H = 0.406767968					H = 4.42156643			
	Gaussian	Midpoint	Trapizoidal	Simpson		Gaussian	Midpoint	Trapizoidal	Simpson
0	370 (9.938)	370 (2.016)	370 (1.906)	370 (8.328)	0	370 (9.422)	370 (2.344)	370 (1.984)	370 (7.749)
0.001	274.431 (10.282)	274.431 (2.188)	274.431 (1.891)	274.431 (7.437)	0.001	335.072 (8.953)	335.072 (2.016)	335.073 (2.015)	335.072 (8.172)
0.003	180.95 (10.110)	180.95 (2.437)	180.95 (1.937)	180.95 (7.640)	0.003	281.9 (9.282)	281.9 (2.281)	281.9 (1.953)	281.9 (7.453)
0.005	134.973 (9.984)	134.973 (2.218)	134.973 (2.063)	134.973 (8.547)	0.005	243.333 (9.812)	243.333 (2.219)	243.333 (2.031)	243.333 (8.766)
0.01	82.5439 (9.969)	82.5439 (2.219)	82.5439 (2.203)	82.5439 (8.000)	0.01	181.419 (9.578)	181.419 (2.250)	181.419 (1.938)	181.419 (7.922)
0.03	32.3441 (10.172)	32.3441 (2.281)	32.3441 (3.843)	32.3441 (8.109)	0.03	90.2627 (10.281)	90.2627 (2.235)	90.2627 (1.828)	90.2627 (8.719)
0.05	20.1426 (9.907)	20.1426 (2.375)	20.1426 (2.797)	20.1426 (9.063)	0.05	60.3242 (10.015)	60.3242 (2.218)	60.3243 (1.907)	60.3242 (8.328)
0.1	10.4347 (9.922)	10.4347 (2.156)	10.4347 (2.672)	10.4347 (8.469)	0.1	33.2976 (9.578)	33.2976 (2.172)	33.2976 (2.281)	33.2976 (8.687)
0.3	3.79579 (9.922)	3.79579 (2.047)	3.79579 (2.407)	3.79579 (9.578)	0.3	12.4948 (9.937)	12.4948 (2.265)	12.4948 (2.297)	12.4948 (8.359)
0.5	2.52192 (9.906)	2.52192 (2.109)	2.52192 (2.406)	2.52192 (8.844)	0.5	8.01985 (10.047)	8.01985 (2.281)	8.01985 (2.531)	8.01985 (9.109)
1	1.64622 (10.312)	1.64622 (2.187)	1.64622 (2.406)	1.64622 (9.265)	1	4.58523 (9.828)	4.58523 (2.125)	4.58523 (2.219)	4.58523 (8.734)

ตารางที่ 2 ค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง เมื่อกำหนดให้ $ARL_0 = 500,\ m = 500,\ \lambda = 0.05$

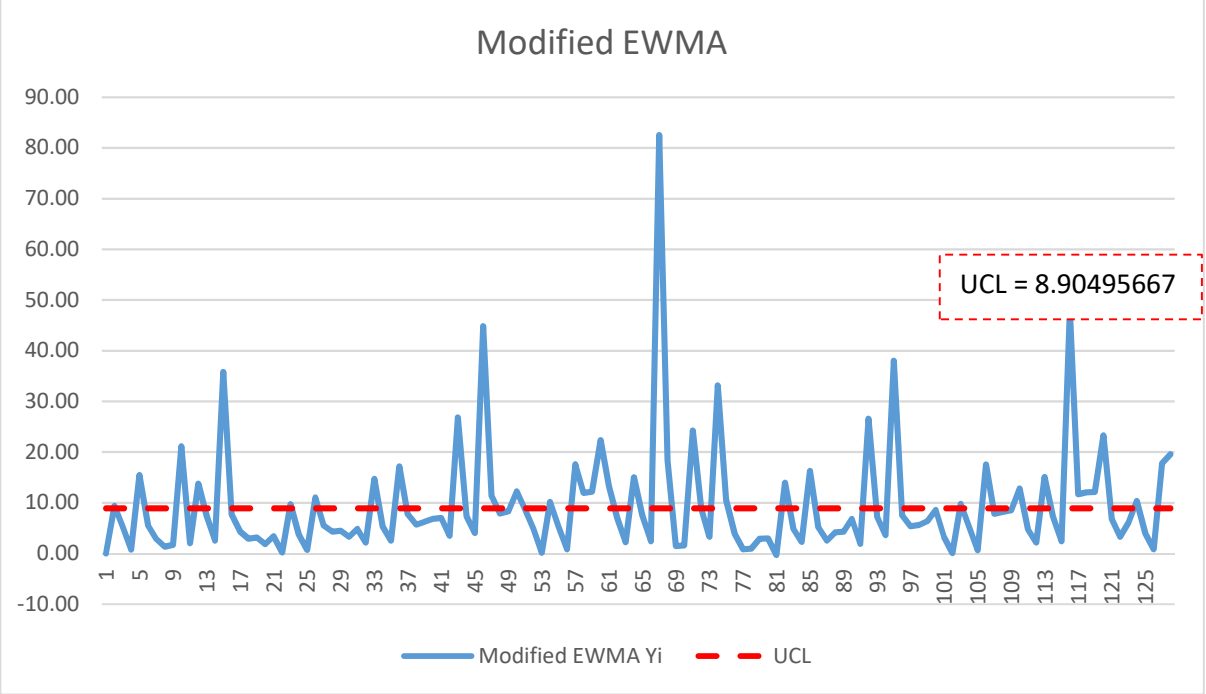
δ	$\beta = 1$				δ	$\beta = 5$			
	H = 0.4073658539					H = 4.42420083			
	Gaussian	Midpoint	Trapizoidal	Simpson		Gaussian	Midpoint	Trapizoidal	Simpson
0	500 (9.907)	500 (1.953)	500 (2.297)	500 (7.547)	0	500 (9.515)	500 (2.515)	500 (2.062)	500 (8.188)
0.001	340.034 (9.594)	340.034 (2.000)	340.034 (2.922)	340.034 (7.953)	0.001	438.205 (9.500)	438.205 (2.344)	438.205 (2.063)	438.205 (8.031)
0.003	207.352 (9.845)	207.352 (2.048)	207.352 (2.063)	207.352 (9.907)	0.003	351.421 (9.969)	351.421 (2.281)	351.422 (2.218)	351.421 (8.672)
0.005	149.152 (10.578)	149.152 (2.016)	149.152 (2.016)	149.152 (9.062)	0.005	293.39 (10.157)	293.39 (2.328)	293.39 (2.015)	293.39 (9.203)
0.01	87.6505 (10.312)	87.6505 (2.000)	87.6505 (2.031)	87.6505 (10.234)	0.01	207.793 (10.422)	207.793 (2.313)	207.793 (2.125)	207.793 (9.625)
0.03	33.1056 (11.765)	33.1056 (2.093)	33.1056 (2.047)	33.1056 (8.968)	0.03	96.2905 (10.469)	96.2905 (2.375)	96.2905 (2.063)	96.2905 (9.328)
0.05	20.437 (10.563)	20.437 (3.609)	20.437 (1.969)	20.437 (9.077)	0.05	62.9346 (10.922)	62.9345 (2.406)	62.9346 (2.094)	62.9346 (9.594)
0.1	10.5138 (9.703)	10.5138 (2.500)	10.5138 (2.203)	10.5138 (8.906)	0.1	34.061 (10.531)	34.061 (2.312)	34.061 (2.546)	34.061 (9.329)
0.3	3.80587 (10.453)	3.80587 (2.531)	3.80587 (2.360)	3.80587 (8.922)	0.3	12.5925 (10.454)	12.5925 (2.296)	12.5926 (2.312)	12.5925 (8.984)
0.5	2.52597 (11.578)	2.52597 (2.453)	2.52597 (2.312)	2.52597 (10.016)	0.5	8.05712 (10.781)	8.05712 (1.859)	8.05713 (1.937)	8.05712 (9.750)
1	1.64751 (11.610)	1.64751 (1.922)	1.64751 (1.891)	1.64751 (9.641)	1	4.59558 (10.469)	4.59558 (2.391)	4.59558 (2.500)	4.59558 (9.250)

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA และแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับข้อมูลมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง เมื่อกำหนดให้ $m = 500,\ \lambda = 0.05, ARL_0 = 370$ และ 500 ตามลำดับ

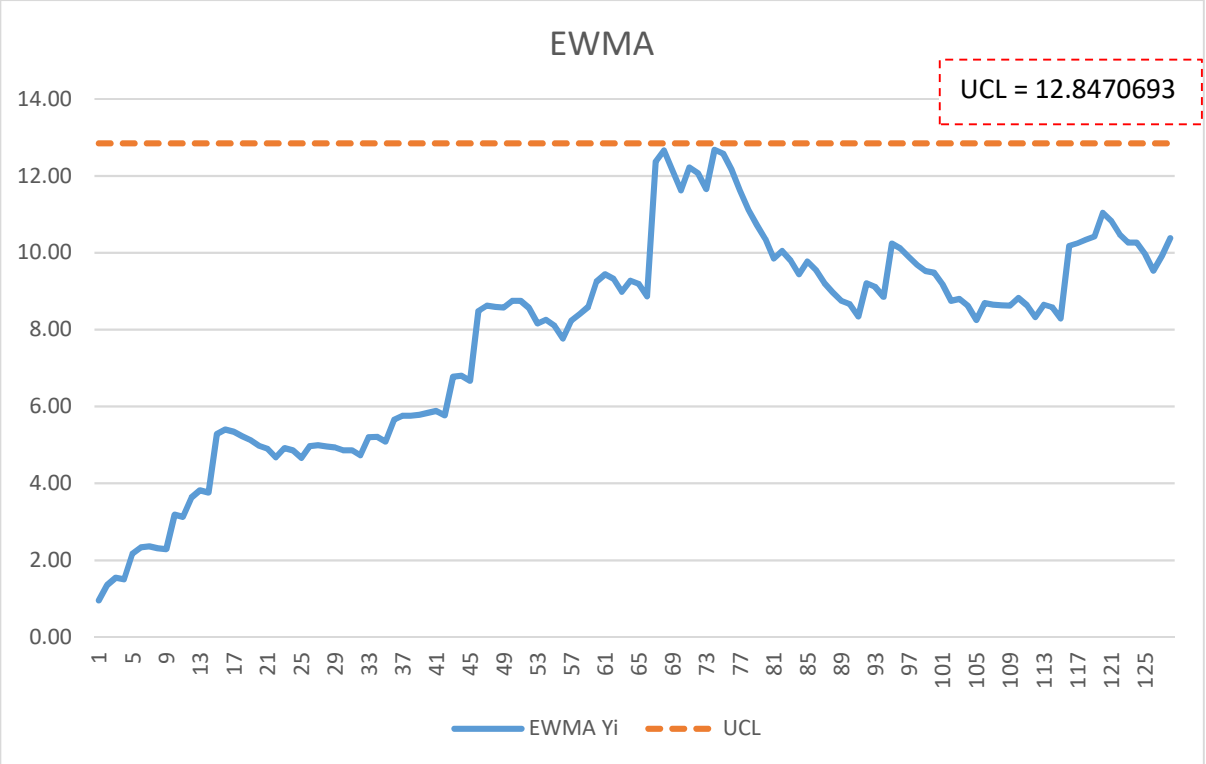
δ	$\beta = 1$		$\beta = 5$		δ	$\beta = 1$		$\beta = 5$	
	Modified EWMA (H = 0.406767968)	EWMA (H=1.406)	Modified EWMA (H = 4.42156643)	EWMA (H=6.96923)		Modified EWMA (H = 0.4073658539)	EWMA (H=1.44199)	Modified EWMA (H = 4.42420083)	EWMA (H=7.18935)
0	370 (1.906)	370 (9.141)	370 (1.984)	370 (10.141)	0	500 (2.297)	500 (9.437)	500 (2.062)	500 (9.625)
0.001	274.431 (1.891)	366.224 (9.078)	335.073 (2.251)	369.306 (9.828)	0.001	340.034 (2.922)	494.776 (9.063)	438.205 (2.063)	499.065 (9.218)
0.003	180.95 (1.937)	358.718 (9.750)	281.9 (1.953)	367.923 (8.969)	0.003	207.352 (2.063)	484.778 (10.000)	351.422 (2.218)	497.179 (9.375)
0.005	134.973 (2.063)	351.386 (9.109)	243.333 (2.031)	366.546 (9.578)	0.005	149.152 (2.016)	474.973 (8.969)	293.39 (2.015)	495.301 (9.484)
0.01	82.5439 (2.203)	333.803 (9.234)	181.419 (1.938)	363.132 (9.453)	0.01	87.6505 (2.031)	451.312 (9.515)	207.793 (2.125)	490.637 (9.484)
0.03	32.3441 (3.843)	273.222 (9.203)	90.2627 (1.828)	349.871 (8.906)	0.03	33.1056 (2.047)	368.405 (10.343)	96.2905 (2.063)	472.427 (8.938)
0.05	20.1426 (2.797)	225.861 (9.297)	60.3243 (1.907)	337.221 (9.750)	0.05	20.437 (1.969)	302.484 (9.563)	62.9346 (2.094)	454.927 (9.015)
0.1	10.4347 (2.672)	147.434 (9.500)	33.2976 (2.281)	308.113 (9.860)	0.1	10.5138 (2.203)	192.653 (10.078)	34.061 (2.546)	414.229 (9.656)
0.3	3.79579 (2.407)	47.8981 (9.969)	12.4948 (2.297)	221.011 (9.578)	0.3	3.80587 (2.360)	57.5581 (9.016)	12.5926 (2.312)	290.085 (9.813)
0.5	2.52192 (2.406)	25.9724 (9.828)	8.01985 (2.531)	166.288 (9.719)	0.5	2.52597 (2.312)	29.9996 (9.516)	8.05713 (2.219)	211.868 (9.985)
1	1.64622 (2.406)	11.8797 (9.657)	4.58523 (2.219)	97.243 (9.750)	1	1.64751 (3.219)	13.2194 (9.671)	4.59558 (2.500)	116.191 (9.516)

ตารางที่ 4 เปรียบเทียบค่าความยาวรันเฉลี่ยของแผนภูมิควบคุม Modified EWMA และแผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับข้อมูลจริงที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์ $\beta = 9.21$ กำหนดให้ $m = 500,\ \lambda = 0.05, ARL_0 = 370$ และ 500 ตามลำดับ

δ	$\beta = 9.21$			
	Modified EWMA (H = 8.90495667)	EWMA (H=12.8470693)	Modified EWMA (H = 8.90969902)	EWMA (H=13.26097)
0	370 (1.797)	360.543 (9.141)	500 (1.859)	500 (9.078)
0.001	349.518 (1.797)	360.178 (9.297)	463.269 (1.891)	499.49 (9.078)
0.003	314.696 (1.859)	359.451 (9.203)	403.952 (1.797)	498.473 (9.141)
0.005	286.203 (1.828)	358.725 (9.234)	358.132 (1.859)	497.457 (10.109)
0.01	233.435 (1.875)	356.92 (9.343)	279.092 (1.844)	494.927 (9.125)
0.03	134.618 (1.781)	349.809 (9.827)	148.557 (1.922)	484.934 (9.484)
0.05	94.7897 (1.890)	342.876 (10.437)	101.457 (1.891)	475.146 (9.625)
0.1	54.7877 (2.047)	326.3 (9.531)	56.9212 (2.531)	451.572 (9.594)
0.3	20.964 (2.375)	269.729 (9.516)	21.2536 (2.125)	369.623 (9.500)
0.5	13.3071 (2.063)	226.062 (9.547)	13.4176 (2.094)	305.338 (9.609)
1	7.33593 (2.109)	154.583 (9.812)	7.36585 (2.125)	200.194 (9.968)



ภาพที่ 1 แผนภูมิควบคุม Modified EWMA สำหรับข้อมูลจริง



ภาพที่ 2 แผนภูมิควบคุม EWMA สำหรับข้อมูลจริง

อภิปรายผล

จากตารางที่ 1 – ตารางที่ 2 จะพบได้ว่า วิธีการประมาณค่าความยาวรันเฉลี่ยทั้ง 4 วิธีที่ได้จากวิธีสมการปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integral Equations : NIE) สามารถสรุปได้ว่าทั้ง 4 วิธีมีประสิทธิภาพเท่ากันในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง เมื่อพิจารณาจากค่า ARL_1 และเมื่อพิจารณาจากความเร็วในการประมวลผล (CPU Times) ต่ำที่สุด มีสองวิธี คือวิธีกฎค่ากลาง (Midpoint Rule) และ วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) ที่ให้ค่าความเร็วในการประมวลผลต่ำที่ไม่แตกต่างกัน

จากตารางที่ 3 พบว่า แผนภูมิควบคุม Modified EWMA สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ดีกว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลง เมื่อกำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ย $\mathrm{ARL}_0 = 370$ และ 500 และพารามิเตอร์ $\beta = 1$ และ 5 ตามลำดับ

จากตารางที่ 4 จะเห็นได้ว่า เมื่อทดสอบกับข้อมูลจริง แผนภูมิควบคุม Modified EWMA ก็ยังคงสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ดีดว่าแผนภูมิควบคุม EWMA ในทุกระดับการเปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกันกับตารางที่ 3

จากภาพที่ 1 แสดงค่าสถิติ Modified EWMA ที่พล็อตกับค่าขีดจำกัดควบคุม UCL ที่มีค่าเท่ากับ 8.90495667 เมื่อกำหนดค่าความยาวรันเฉลี่ย $\mathrm{ARL}_0 = 370$, $m = 500$, $\lambda = 0.05$ และพารามิเตอร์ของข้อมูลจริง $\beta = 9.21$ จะเห็นได้ว่า แผนภูมิควบคุม Modified EWMA ข้อมูลตัวที่ 2, 5, 10, 12, 15, 23, 26, 33, 36, 43, 46, 47, 50, 54, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 67, 68, 71, 72, 74, 75, 82, 85, 92, 95, 103, 106, 110, 113, 116, 117, 118, 119, 120, 124, 127 และ128 ตกอยู่นอกขีดจำกัดควบคุม และจากภาพที่ 2 แสดงค่าสถิติของแผนภูมิควบคุม EWMA สังเกตได้ว่าค่าทั้งหมดตกอยู่ภายใต้ขีดจำกัดควบคุม ซึ่งผลการวิเคราะห์สรุปได้ว่า แผนภูมิควบคุม Modified EWMA มีความสามารถในการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้เร็วกว่า เมื่อเทียบกับแผนภูมิควบคุม EWMA

ข้อเสนอแนะ

สามารถทำแผนภูมิควบคุม Modified EWMA มาประยุกต์ใช้กับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบอื่น ๆ และแผนภูมิควบคุม Modified EWMA สามารถปรับเพิ่มเติม โดยใช้สถิติค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเลขชี้กำลังผสมผสาน สำหรับการวิจัยในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

ธิดาเดียว มยุรีสวรรค์. (2546). *การควบคุมคุณภาพในอุตสาหกรรม*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ผลิตตำราเรียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

Areepong Y., Sukparungsee S. (2010). An Integral Equations Approach to EWMA Chart for Detecting a Change in Lognormal Distribution. *Thailand Statistician,* 2010, 8(1). Retrieved July 16, 2019, from https://www.tci-thaijo.org/index.php/thaistat/article/view/34297.

Alpaben K. Patel, Jyoti Divecha. (2011). Modified exponentially weighted moving average (EWMA) control chart for an analytical process data. *Journal of Chemical Engineering and Materials Science*, 2011, 2(1). Retrieved July 16, 2019, from http://www.academicjournals.org/app/webroot/article/article1379429479_Patel%20and%20Divecha.pdf.

Rama Shanker, Hagos Fesshaye, Sujatha Selvaraj. (2015). On modeling of lifetimes data using exponential and lindley distributions. *Biometrics & Biostatistics International Journal*, 2015. Retrieved November 25, 2019, from http://medcraveonline.com/BBIJ/BBIJ-02-00042.pdf.

Phanthuna P., Areepong Y., Sukparungsee, S. (2018). Numerical Integral Equation Methods of Average Run Length on Modified EWMA Control Chart for Exponential AR(1) Process. *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*, 2018. Retrieved July 16, 2019, from http://www.iaeng.org/publication/IMECS2018/IMECS2018_pp845-847.pdf.